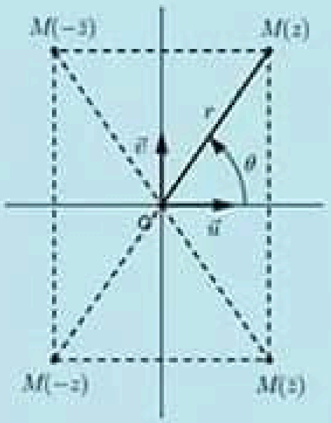
Les nombres complexes - Cours

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On désigne par z et z' deux nombres complexes et par $M(z)$ l'image de z dans le plan complexe.

- z est un réel pure $\Leftrightarrow z-\bar{z}=0$
- z est imaginaire pure $\Leftrightarrow \bar{z}+z=0$



Forme algébrique

- $z=a+ib$ avec a et b deux réels. $a=\mathrm{Re}(z)$ et $b=\mathrm{Im}(z)$
- $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=OM$

Forme trigonométrique

- $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ avec $r=|z|$ et $\theta=\arg(z)$
- $a=r\cos\theta$ et $b=r\sin\theta$

Forme exponentielle

- $z=re^{i\theta}$ avec $r=|z|$ et $\theta=\arg(z)$

Conjugué

- Si $z=a+ib\ (a,b\in IR)$ alors $\bar{z}=a-ib$ $\quad \mathrm{Re}(z)=a=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$ $\quad \mathrm{Im}(z)=b=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$
- Si λ un nombre réel alors $\overline{\lambda z}=\lambda\bar{z}$
- $z\bar{z}=|z|^2$ $\quad \overline{zz'}=\bar{z}\times\bar{z'}$ $\quad \overline{(z+z')}=\bar{z}+\bar{z'}$ $\quad \overline{z^n}=(\bar{z})^n$ $\quad \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\bar{z}}$ $\quad \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}}$

Module, argument et conjugué, produit, quotient

- Si $\lambda\in IR_+^*$ alors $|\lambda z|=\lambda|z|$ et $\arg(\lambda z)=\arg(z)$
- Si $\lambda\in IR_-^*$ alors $|\lambda z|=-\lambda|z|$ et $\arg(\lambda z)=\arg(z)+\pi$
- $|\bar{z}|=|z|$ $\quad |zz'|=|z||z'|$ $\quad |z^n|=|z|^n$ $\quad \left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$ $\quad |z+z'|\le|z|+|z'|$
- $\arg(-z)=\arg(z)+\pi$ $\quad \arg(\bar{z})=-\arg(z)$ $\quad \arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')$ $\quad \arg(z^n)=n\arg(z)$
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')$

Formule de Moivre

- Pour tout $\theta\in IR$ et $n\in\mathbb{Z}$, on a $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$

Formules d'Euler

- Pour tout $\theta\in IR$, on a $\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Complexe et géométrie

- Si M est le point d'affixe z alors :
  - Le point d'affixe $(-z)$ est le symétrique de M par rapport à l'origine
  - Le point d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses
  - Le point d'affixe $(-\bar{z})$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées

Soit A, B, C et D quatre points du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D

- $\mathrm{aff}(\overrightarrow{AB})=z_B-z_A$ $\quad AB=|z_B-z_A|$ $\quad (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}})=\arg\left(\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)$
- A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$
  $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\in IR \Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$
- $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow \dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ est imaginaire pure $\Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\pi+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$

Equations à coefficients complexes

- $i^2 = -1$ $\qquad i^3 = -i$ $\qquad i^4 = 1$ $\qquad \frac{1}{i} = -i$
- Soit $z = re^{i\theta}$ $(r \geq 0)$ un nombre complexe. Les racines complexes de z sont $z_1 = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $z_2 = -\sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$
- Les racines complexes du nombre $Z = a + ib$ sont les nombres complexes (il y en a deux) $z = x + iy$ avec (x, y) est une solution du système $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$
- On considère l'équation $(E): az^2 + bz + c = 0$ tels que a, b et c sont des complexes et $a \neq 0$

  $\Delta = (b^2 - 4ac)$ est le discriminant de (E). On désigne par δ une racine complexe de Δ

  Si $\Delta = 0$

  (E) possède une solution double $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$

  Si $\Delta \neq 0$

  (E) possède deux solutions distincts $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$
- Si z_1 et z_2 sont les solutions d'une équation $az^2 + bz + c = 0$ alors on a :
  - $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$
  - $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$
- Soient S et P deux nombres complexes donnés. Les nombres complexes z_1 et z_2 tels que :

  $$\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 z_2 = P \end{cases}$$

  sont les solutions de l'équation $z^2 - Sz + P = 0$
- Soient r un réel strictement positif et $Z = re^{i\theta}$ un nombre complexe. Z possède exactement n racines $n^{ième}$ distinctes z_k (qui sont les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^n = Z$) :

  $$z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} \text{ avec } k \in \{0, 1, 2, ..., (n-1)\}$$

  Les images M_k des racines z_k sont les sommets d'un polygone régulier à n cotés dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$

DES ERREURS A EVITER

- Ne pas écrire d'inégalités entre complexes : il est impossible de comparer des nombres complexes
- Le conjugué de $z - z'$ n'est pas $z + z'$ mais $\bar{z} - \bar{z'}$
- Il est interdit d'utiliser la notation $\sqrt{\ }$ pour exprimer une racine carrée d'un nombre complexe car il ne s'agit pas d'une fonction dans $\mathbb{C}$
- L'argument du nombre complexe nul n'est pas 0 : l'argument du nombre complexe nul n'est pas défini